جامعة البعث — امتحان مقرر الدوال محدودة التغير — اسم الطالب:
كلية العلوم — للفصل الأول للعام 2014/2013 — الدرجة: 100
قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات — المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك ، (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(33 د): (أ) — بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه نت م على الفترة $[\sqrt{2},5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) —ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$ – مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) —أوضح أن الدالة $y=\sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ث م ، و ما هو تغيرها الكلي.

السؤال الثاني(34 د): (أ) — إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$ فأثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة .

(ب) —بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم إحسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) —أعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة ل g ، بينما التكامل: $\int_a^b f\,dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي: $K=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د): (أ) —بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$$x\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right] \quad ; \quad f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \;\text{ و }\; f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n((1+x)e)^{-n} \quad \text{حيث} \quad x\in\,]0,1[$$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز وأنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)—إذا كانت $X=\mathbb{N}$ والدالة $\mu(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ حيث $A\in P(N)$ و $\mu(\phi)=0$ و $\alpha_n=\frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، والمطلوب:

1—بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2—احسب قياسات المجموعات : N ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ ،

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فأثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x\in E: f(x)=-\infty\}$, $\{x\in E: f(x)=\infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12 — مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح — مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة النهرين
كلية العلوم
قسم الرياضيات

توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير

الدور الأول [الفصل الأول] $\frac{2013}{2014}$ — الدرجة: 100

السنة الثالثة - رياضيات

السؤال الأول (33 درجة) أ) بيّن أن دالة ديرشليه ليست ذات تغير محدود في الفترة المعطاة $[\sqrt{2}, 5]$ وذلك بتجزئة هذه الفترة بواسطة نقاط جزئية بحيث تحتوي هذه الفترة الجزئية على ... ، دالة ديرشليه هي:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in \bar{Q} = R - Q \end{cases}$$

البرهان:

12

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = n$$

حيث n عدد صحيح، بالتالي نستنتج أنه من أجل أي عدد موجب M مهما كان كبيراً علينا اختيار تجزئة للفترة $[\sqrt{2}, 5]$ تحتوي عدداً صحيحاً n كبيراً بالقدر الكافي بحيث إن:

$$V(\varphi, P) = n > M \Rightarrow \overset{5}{\underset{\sqrt{2}}{V}}(\varphi) = \infty$$

ولإثبات أن $\varphi(x) \overset{a.e.}{=} 0$ بالنسبة ... في الصفر تقريباً في كل مكان ... (أي قياس ...) تساوي الصفر ... لأنه ... الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ ... الأعداد النسبية ... في هذه الفترة ...

ب) دالة الجزء الصحيح $E(x) = [x]$ ... مشتقة في الفترة $[0, 9]$

11

... مستمرة تقريباً في كل مكان ... لأن قياس مجموعة النقاط التي ليست ... ، وهي فترة محدودة ...

- ... ليست ...

ج) ... التعريف للاستمرار المطلق ... $f(x) = \sqrt{x}$ ... $[0,1]$ ... محدودة ...

10

... $\varepsilon > 0$ ... $\delta > 0$ ... $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ ... من الفترات الجزئية ... $[a, b]$ ...

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \Leftarrow \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

- ... ، ... مقيدة ... في الفترة ... $|y| - 1$ ...

السؤال الثاني (30) :

ب) إذا كانت f دالة محدودة التغير على $[a,b]$ ، P_1 تجزئة للفترة $[a,b]$ فإن f^2 محدودة التغير

$$V(f^2, P_1) = \sum_{k=1}^{n} |f^2(x_k) - f^2(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \, |f(x_k) + f(x_{k-1})|$$

$$\le 2k \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = 2k \cdot V(f, P_1)$$

و f^2 ذات تغير محدود على $[a,b]$ ، والتوضيح حسب التعريف

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E ; & c < 0 \\ E(|f| > \sqrt{c}) ; & \sqrt{c} \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

وبالتالي قيوسية لأن الطرف الأيمن يكون مجموعة قيوسية

- والمثال المضاد لعكس f على $[a,b]$ تكون ذات تغير محدود

$$V_f(a) = 0$$

$$V_f(y) = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) \; ; \; a < y \le b$$

إذا كان التغير الكلي للفترة $[a,y]$ ، ومن خواص أنها محدودة - متزايدة - ذات تغير - مستمرة

4

(ب) تكون مجموعة A القياسية في الفترة …

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E ; & c < 0 \\ A ; & 0 \le c < 1 \\ \phi ; & c \ge 1 \end{cases} \quad ; \forall c \in \mathbb{R}$$

إذا الدالة قياسية لأن الطرف الأيمن مجموعات قياسية لأي قيمة c

10

$$\int_{E=[0,1]} I_A(x) \, d\lambda = \int_A + \int_{E-A} = \lambda(E)$$

ج) مثال : لنأخذ $g(x) = x$ ، $E = [0,1]$ والجزء … محدودة والمستمرة

قابلة تكامل ريمان … على $[a,b]$ ، وبالتالي f …

$$f = \begin{cases} 1 ; & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ -1 ; & x \in [a,b] \cap \bar{\mathbb{Q}} \end{cases} \Rightarrow |f| = 1 , \; x \in [a,b]$$

10

ولكن $|f|$ قابلة … و g …

- حساب التكامل … على الفترة $[a,b]$ …

$$K = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$x = \pi - t$ ، t من π إلى 0 :

$$K = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi^2}{4}$$

وهو المطلوب

نتمنى …

(د)

السؤال الثالث (33) أ ، f_1 ، [illegible] f ، [illegible]

٢ $]0,1[$ [illegible] f [illegible] $[1,\infty[$ [illegible]

[illegible] $f_2 = \frac{1}{1+x}$ [illegible]

[illegible] $[0,\frac{1}{2}]$.

- [illegible] الشرط المعروف [illegible] .

5

$$|f_2(y) - f_2(x)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq (1)(1)\,|x-y| = |x-y|$$

> 0

[illegible] $L = 1$ [illegible] $[0,\frac{1}{2}]$

[illegible] .

(ب) ١) [illegible] $\mu(\phi) = 0$ [illegible]

[illegible] $P(N)$ [illegible] $\mu(X) = \mu(N) = \sum_{n \in N} \frac{1}{n}$

[illegible] $\frac{1}{n}$ [illegible] n [illegible] $\mu(X) < \infty$

[illegible]

$$\mu(N) = \infty \,,\quad \mu(\{25\}) = \frac{1}{25} \,,\quad \mu(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$$

17

- [illegible] f [illegible] E [illegible] $E(f=\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f>n)$

[illegible]

$$E(f=-\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<-n)$$

[illegible]

- [illegible] R [illegible] .

[illegible]

د. [illegible]

[illegible] ١٦/٢/٢٠١٤

1

2

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الثالث للعام 2013/ 2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(35 درجة): (أ) - إذا كان للدالة f مشتقاً محدوداً على الفترة $[a,b]$ (المغلقة و المحدودة في جميع الأسئلة) ، فأثبت أنها تكون ذ ت م ، ثم استنتج أنها قيوسة عليها.

- بين أن الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ذ ت م على $[0,2]$ ، وناقش هل يلزم كون مشتقها محدوداً على هذه الفترة أن تكون ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي على نفس الفترة.

(ب) - ادرس الاستمرار المطلق للدالة: $g(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1,3]$ و كذلك المحدودية تقريباً لها في كل مكان على $\Re$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على تلك الفترة.

السؤال الثاني(30 درجة): (أ) - إذا كانت $S_k\ (k=1,2,...)$ أسرة من الجبور التامة في $X\neq\phi$ ، فأثبت أن $S=\bigcap_k S_k$ جبراً تاماً في X .

- ابحث مع التعليل في كون صف المجموعات المحدودة في $\Re$ ، جبر ، جبر تام ؟

(ب) - بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq[a,b]$ (حيث A مقيسة من هذه الفترة) كمولة لوبيغياً على الفترة $[a,b]$ ، ثم احسبه(أي: $=(L)\int_{[a,b]} I_A\,(x)d\lambda$) .

السؤال الثالث(35 درجة): (أ) - أحسب التغير الكلي للدالة على الفترة $[0,10]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2 & ; \quad 0\le x\le 1\\ 0 & ; \quad 1<x\le 3\\ 2 & ; \quad 3<x<10\\ 5 & ; \quad x=10\end{cases}$$

ثم أحسب التكامل الآتي علماً أنه موجوداً :

$$J=(S)\int_0^{10} x^2\, d\varphi(x)$$

(ب) - إذا كان $\lambda(E)=0$ ، عندئذ أثبت أن كل دالة h معرفة على E تكون قيوسة عليها .

- علل هل المجموعة Q بوريلية و مقيسة ؟ و ما هو قياس ليبغ للمجموعات : $]5,6[$, Q , $\{2014\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

$\frac{1}{5}$ - 1

حمص في 2014/8/19

مدرس المقرر: د.محمد عامر

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

جامعة البعث — توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير — 2

كلية العلوم — الدورة الإضافية للعام $\frac{2013}{2014}$ — الدرجة: 100

قسم الرياضيات — سنة ثالثة - رياضيات

السؤال الأول (35°)

أ) لدينا : $x \in [a,b]$ ($\forall x \in]a,b[$) ; $|f'(x)| \leq L$ ($L>0$)

الدالة محققة لشروط مبرهنة القيمة الوسطى وحسب لاغرانج توجد نقطة $z \in (x_1, x_2)$ بحيث يكون $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$$

وبالتالي نحصل على $x_1, x_2 \in [a,b]$ لكل

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(z)||x_2 - x_1| \leq L|x_2 - x_1|$$

(9)

وهذا يعني أن f تحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$ و $L>0$ وحسب مبرهنة تكون f ذات تغير محدود.

- ولا نعلم أن كل دالة ذات تغير محدود تكون مشتقتها محدودة على $[a,b]$ (أي لا يكون العكس صحيحاً) [illegible]

* مثال: $f(x) = \sqrt[5]{x}$ متزايدة تماماً حسب تعريف (التزايد تماماً) على $[0,2]$

فهي ذات تغير محدود عليها حسب مبرهنة ... وتغيرها الكلي

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(\sqrt[5]{x}) = \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{0} = \sqrt[5]{2} > 0$$

- لنوجد مشتقها على الفترة $[0,2]$ ،

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^{-\frac{2}{5}} & ; x \in]0,2] \\ \infty & ; x = 0 \end{cases}$$

وهذا يعني أن مشتقها ليس محدوداً بجوار الصفر (المشتقة تسعى نحو ∞) ، ومع ذلك فإن f ذات تغير محدود كما أسلفنا.

أي أنه ليس بالضرورة أن يكون المشتق محدوداً لتكون f ذات تغير محدود.

ب) الاستمرار المطلق لـ g ، لدينا هنا $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ في $]1,3[$ أو $[1,3]$ ومحدود على

$[1,3]$ مستمرة مطلقاً على $[1,3]$ ، $x \in [1,3]$ لكل $|g'(x)| \leq \frac{1}{1} = 1$ أي أن g تحقق شرط ليبشتز وبالتالي

(15)

محدودة تقريباً في $\mathbb{R}$ ، لأن g محدودة تقريباً لكل عناصر $\mathbb{R}$ ، محدودة في المجموعة $\{0\}$

والتي قياسها حسب ليبيغ يساوي الصفر (أي $\lambda(\{0\}) = 0$)

دالة التغير لها ، الدالة g . متناقصة تماماً في $[1,3]$ لأن مشتقها سالب ، وهي ذات تغير محدود على $[1,3]$ ، والتوجيه المطلوب :

$$\vartheta_g(x) = \begin{cases} \overset{x}{\underset{1}{V}}(g) & ; 1 < x \leq 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases} \Rightarrow \overset{x}{\underset{1}{V}}(g) = \sup_P \{g(1) - g(x)\} = \sup_P \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$\vartheta_g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & ; 1 < x \leq 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

دالة التغير المنشودة.

يتبع ←

(...)

السؤال الثاني (30°) أ) - علينا إثبات أن $S=\bigcap_k S_k$ جبر σ في X.

لنبدأ بتحقيق الشروط ، حيث أن $\phi , X \in S_k$ ولذلك فإن $\in \bigcap_k S_k$ ($k=1,2,\ldots$) وشرط ١

حيث أن $E_1, E_2, \ldots \in S_k$ (جبر σ) ولذا فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S_k$ وبالتالي

فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \bigcap_k S_k$ والشرط (2) تحقق

حتى إذا كان $E \in S_k$ فإن $\tilde{E} \in S_k$ وبالتالي $E \in \bigcap_k S_k$ فإن $\tilde{E} \in \bigcap_k S_k$

حيث $\tilde{E} = X - E$.

17

والشرط (3) تحقق ، وهذا يعني أن S جبر σ في X.

- صنف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ ، جبر-σ أم جبر تام أم ماذا؟

تذكر أن ϕ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$ (لأنها محدودة في أي فترة) ولكن $X=\mathbb{R}$ ليست محدودة ، مما يعني أن صنف المجموعات المحدودة ليست جبراً لأن $\mathbb{R} \notin$ إن هذا الصنف لأنه ليس مغلقاً بالنسبة للمتمم) أي أنه لا يحقق شرط الجبر.

- وبالتالي لا يمثل أن جبراً تاماً ، لأنه لو كان جبراً تاماً لاحتوى على $\mathbb{R}$ وهذا لا يمكن حسب ما سبق:

ب) الدالة المميزة لها ... ، بمعنى:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \in \tilde{A} \end{cases} \quad ; \quad \tilde{A} = E - A = [a,b] - A$$

- فلو فرضنا أن A قياسية فنثبت أن الدالة المميزة قياسية في $[a,b]$. في الحقيقة ،

13

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E=[a,b] & ; c<0 \\ A & ; 0 \le c < 1 \\ \phi & ; c \ge 1 \end{cases}$$

إذاً المجموعة $E(I_A > c)$ قياسية لأي c في $\mathbb{R}$ ، وهذا يعني أن الدالة المميزة لـ A قياسية في $[a,b]$

- محدودة: لأنها محدودة لأن $|I_A(x)| \le 1 \;;\; x \in [a,b]$

والفترة $[a,b]$ محدودة وقياسها هو: $\lambda([a,b]) = b-a < \infty$

وهذا يعني أن تكامل ليبيغ لا يعتمد في $[a,b]$ ، وليس له ...

$$\int_{[a,b]} I_A(x)\, d\lambda = \int_A I_A(x)\, d\lambda + \int_{\tilde{A}} I_A(x)\, d\lambda = \int_A 1 \cdot d\lambda + \int_{\tilde{A}} 0\, d\lambda$$

$$= \lambda(A).$$

وهو المطلوب.

السؤال الثالث (35°) : (أ) حساب التغير الكلي لـ φ على $[0,10]$:

$$V_0^{10}(\varphi) = |\varphi(0+0)-\varphi(0)| + |\varphi(1)-\varphi(1-0)| + |\varphi(1+0)-\varphi(1)|$$
$$+ |\varphi(3)-\varphi(3-0)| + |\varphi(3+0)-\varphi(3)| + |\varphi(10)-\varphi(10-0)|$$
$$= |0| + |-2+2| + |0+2| + |0-0| + |2-0| + |5-2|$$
$$= 0+0+2+0+2+3 = 7$$

حيث النقاط $c_1=1$ ، $c_2=3$ نقاط انقطاع من النوع الأول والدالة بدون ذلك ثابتة على $[0,10]$ ونهائية [illegible]
$0<1<3<10$
محدودة على $[0,10]$

(ب) حساب التكامل (ستيلتجس موجود). $f(x)=x^2$

(20)

$$I = (S)\int_0^{10} x^2 \, d\varphi(x) = f(0)[\varphi(0+0)-\varphi(0)] + f(1)[\varphi(1+0)-\varphi(1-0)] + f(3)[\varphi(3+0)-\varphi(3-0)] + f(10)[\varphi(10)-\varphi(10-0)]$$
$$= 0[-2+2] + 1[0+2] + 9[2-0] + 100[5-2] = 2+18+300 = 320$$

(ج) - إثبات h قيوسة على E ، $\lambda(E)=0$ و E مقيسة :

طالما $E(h>c) \subseteq E \underset{\text{بالتالي}}{\Rightarrow} \lambda\{E(h>c)\} \le \lambda(E)=0$

ومنه نجد $\lambda\{E(h>c)\}=0$ ، ومنه فإن المجموعة مقيسة [illegible] لكل $c \in \mathbb{R}$ ..

ومن تعريف الدالة القيوسة نجد h دالة قيوسة على E حيث $\lambda(E)=0$.

(15)

(د) - $\mathbb{Q}$ بوريلية ومقيسة: لأنها بوريلية لأنها تكتب على شكل اتحاد قابل للعد من المجموعات المغلقة $\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \{q_n\}$ والمجموعات البوريلية مقيسة (أي $B_{\mathbb{R}} \subseteq L$)

القياس: $\lambda(\{2014\})=0, \quad \lambda(\mathbb{Q})=0, \quad \lambda([5,6[) = 6-5=1$

أستاذ المقرر
د. محمد عامر

[illegible]

الاثنين 19/8/2014

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : **(تمنع الآلة الحاسبة)**

السؤال الأول(35 درجة): (أ) – إذا كان للدالة f مشتقاً محدوداً على الفترة $[a,b]$ (المغلقة و المحدودة في جميع الأسئلة) ، فأثبت أنها تكون ذ ت م ، ثم استنتج أنها قيوسة عليها.

- بين أن الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ذ ت م على $[0,2]$ ، وناقش هل يلزم كون مشتقها محدوداً على هذه الفترة أن تكون ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي على نفس الفترة.

(ب) –ادرس الاستمرار المطلق للدالة: $g(x)=\dfrac{1}{x}$ على الفترة $[1,3]$ و كذلك المحدودية تقريباً لها في كل مكان على $\Re$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على تلك الفترة.

السؤال الثاني(30 درجة): (أ) –إذا كانت $S_k\ (k=1,2,...)$ أسرة من الجبور التامة في $X\neq\phi$ ، فأثبت أن $S=\bigcap_k S_k$ جبراً تاماً في X .

- ابحث مع التعليل في كون صف المجموعات المحدودة في $\Re$ ، جبر ، جبر تام ؟

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq[a,b]$ (حيث A مقيسة من هذه الفترة) كمولة لوبيغياً على الفترة $[a,b]$ ، ثم أحسبه(أي: $(L)\int_{[a,b]} I_A(x)d\lambda=$) .

السؤال الثالث(35 درجة): (أ) –أحسب التغير الكلي للدالة على الفترة $[0,10]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2 & ;\ 0\le x\le 1\\ 0 & ;\ 1<x\le 3\\ 2 & ;\ 3<x<10\\ 5 & ;\ x=10\end{cases}$$

ثم أحسب التكامل الآتي علماً أنه موجوداً :

$$J=(S)\int_0^{10}x^2\ d\varphi(x)$$

(ب) –إذا كان $\lambda(E)=0$ ، عندئذ أثبت أن كل دالة h معرفة على E تكون قيوسة عليها .

-علل هل المجموعة Q بوريلية و مقيسة ؟ و ما هو قياس ليبغ للمجموعات : $]5,6[$, Q , $\{2014\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

1 , $\frac{1}{5}$

حص في 2014/8/19

مدرس المقرر: د.محمد عامر

$\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}$

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : **(تمنع الآلة الحاسبة)**

السؤال الأول(50 درجة): (أ) – إذا كانت f دالة ذ ت م على $[a,b]$،فأثبت باستخدام التعريف أن كلاً من الدالتين: $|f|$ ، $(-f)$ ذ ت م على نفس الفترة ، مع ذكر التغير الكلي لواحدة منهما على $[a,b]$.

(ب) –1- اكتب صيغةالدالة : λ^* ،و منه أوضح أن قياس المجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ يساوي الصفر وفق λ^* هذه ، و استنتج أنها مقيسة .

2-أثبت أن الدالة : $\mu(E)=0$ هي قياساً متزايداً على الجبر التام S على X غير الخالية (بعد ذكر شروط القياس)، و ادرسه من حيث أنه : منته ، σ - منته و لماذا ؟ .

(ج) –تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي:

$$J=(S)\int_0^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}\left([x]+3\right)$$

ثم احسبه في حال وجوده .

السؤال الثاني(50 درجة): (أ) – لتكن f دالة كمولة ريمانياً على $[a,b]$ ، فأثبت أن الدالة : $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\,;\,\mathrm{x}\in[a,b]$ مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ باستخدام التعريف .

(ب) –1- علل فيما إذا كانت الدالة : $h(x)=\arctan 3\mathrm{x}$ تحقق شرط ليبشتز على $[1,4]$ ، و ماذا نعني بقياس ليبيغ على $\Re$ ، و ما هو قياس ليبيغ لكل من المجموعات : $\{9\}$ ، $\Re-\mathrm{N}$ ، $\Re$.

2- هل الصف : $A=\{\phi,\Re,]-\infty,0]\,,\,]0,\infty[\,\}$ جبراً تاماً- صفاً مطرداً ؟ و لماذا ؟ .

(ت) - ابحث في وجود تكامل ليبيغ لدالة ديريخليه على الفترة $[2,\sqrt{7}]$ (بعد كتابة صيغتها) بدون حساب .
- اثبت أن متتالية الدوال : $f_n(x)=x^n$, $\mathrm{n}\geq 1$ متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة $[0,1]$من دالة يطلب تعيينها .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2014/6/25 — مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول للعام 2013/ 2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك ؛ **(تمنع الآلة الحاسبة)**

السؤال الأول(33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذت م على الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) –ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$- مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) –أوضح أن الدالة $y = \sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ذت م ، و ما هو تغيرها الكلي .

السؤال الثاني(34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$،فأثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة ،

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A \subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم إحسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) – أعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g-دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة ل g ، بينما التكامل : $\int_a^b f\,dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي : $K = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, d x^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د): (أ) –بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$, $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n}$ حيث $x \in]0,1[$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)–إذا كانت $X = \mathbb{N}$ والدالة $\mu(A) = \sum_{x \in A} \frac{1}{n}$ حيث $A \in P(N)$ و $\mu(\phi) = 0$ و $\alpha_n = \frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، و المطلوب:

1–بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2–احسب قياسات المجموعات : $\mathbb{N}$ ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ ،

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فأثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x \in E : f(x) = -\infty\}$, $\{x \in E : f(x) = \infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح   مدرس المقرر: د.محمد عامر

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث ـ كلية العلوم

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الثاني – سنة ثالثة / رياضيات
العام الدراسي (2012 - 2013)

الدرجة: 100
مدة الامتحان : ساعتان

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أنّ f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة .....)) وماهي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $\mathrm{f}(x)=\sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ الدالة :

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(u)dg(u) \quad ; x\in[a,b] \ , F(a)=0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قيوسة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x=0 \\ x^2\sin\frac{\pi}{x^2} & ; 0<x\leq 2\end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحددة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب ليبيغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J=\int_0^3 \arctan x \ d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذٍ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منتهٍ ، σ- منتهٍ – ثم وضح أنّ قياس ليبيغ λ في المجموعة R هو σ- منتهٍ من أجل المجموعات :

$$E_n=[-n,-n+1[\cup[n-1,n[\ ;n=1,2,\ldots$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A}=\{\{x\} \ ; \ x\in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتبولوجيا ؟

- بيّن أنّ كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بيّن فيما إذا كانت المجموعة :

$$I=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{ x \ ; \ \frac{1}{k+1}\leq x<\frac{1}{k}\right\}$$

مقيسة حسب مفهوم ليبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

مدرس المقرر

انتهت الأسئلة

... في 2013/6/11

السؤال الأول: (50)

(أ) إذا كانت الدالة g ذ ت م على الفترة [a, b] (حيث a , b حقيقيان ومحدودان)، فأثبت أنّ الدالة $I(x) = \sin(g(x))$ ذ ت م على نفس الفترة ، طبعاً باستخدام التعريف.

(ب) اعتماداً على فكرة تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$ ، والمطلوب: بيّن فيما إذا كانت دالة ديريخليه φ المعطاة على الفترة $[\sqrt{2}, 4]$ كمولة أم لا بالنسبة للدالة : $g(x) = x + 5$ على نفس الفترة ؟ مع التعليل ؟

- لتكن الآن الدالة : $F(x) = (8 - x^2)[1 - \varphi(x)] \quad ; \quad x \in [\sqrt{2}, 4]$ حيث φ دالة ديريخليه السابقة. يُطلب منك :

1. إثبات أنّ F دالة قيوسة بعد إثبات أنّ φ قيوسة على نفس الفترة المفروضة.
2. أوضح هل الدالة F محدودة تقريباً في كل مكان على $[\sqrt{2}, 4]$ ؟ ولماذا ؟

(ت) بيّن من أجل المتتالية $\alpha_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ ، أنه تصح المساواة التالية :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(\alpha_n)\right)$$

مع أنّ μ قياس منتهٍ على الجبر التام S.

(ث) هل المجموعة :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[7n, 7n + \frac{1}{\ln n}\right] - Q$$

مقيسة أياً كانت $n \geq 1$ ، وفي حالة الإيجاب ، ما هو قياسها $\lambda(A)$ ، ثمّ أضف ، أوجد $\lambda(R)$ ، $\lambda(\{-2\})$ ، $\lambda(\,]0,1[\,)$.

(ج) إذا كانت الدالة f معرّفة على المجموعة E ذات القياس المعدوم (حسب ليبيغ) ، فأثبت أنّ هذه الدالة قيوسة عليها. ثمّ إذا كانت E و F مقيستان ، فهل $E \Delta F$ مقيسة ؟ مع توضيح السبب !

السؤال الثاني: (50)

(1) اكتب نص المبرهنة الخاصة بحساب تكامل ستيلجس وذلك في حال كانت f مستمرة و g تأخذ قيماً ثابتة على [a, b].

(2) إذا كانت $f \in C_{[0,1]}$ ($C_{[0,1]}$ فضاء الدوال المستمرة على [0,1]) ، كما نعلم ليس بالضرورة أن تكون دالة ما من هذا الصف ذ ت م على [0,1] ، فبيّن ذلك بمثال توضيحي من عندك مع الإثبات وما هو التغير الكلي لهذه الدالة على نفس الفترة ، وكتابة الواجب إضافته لتكون الدالة المطردة بتزايد على R ذ ت م عليها.

(3) لتكن μ قياس على الجبر التام S ، ولتكن $A \in S$ مجموعة ما مثبتة ، وأضف أنّ $0 < \mu(A) < \infty$ ، ولنضع من أجل $A \in S$ العلاقة :

$$\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \quad ; \quad B \in S$$

بيّن فيما إذا كانت δ المعرّفة بهذه العلاقة تشكل قياساً على S ، وهل هو منتهٍ - σ - منتهٍ ؟ مع التعليل ؟

(4) بعد التأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_1^3 f(x)\, d\, h(x)$$

حيث :

$$f(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 6 & ; \quad x = 2 \\ x^2 & ; \quad 2 < x < 3 \\ 19 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

ثمّ أحسب قيمته بعدئذٍ.

(5) علل ، فيما إذا كانت الدالة $\psi(x) = x^2 + 10$ تحقق شرط ليبيشتز على الفترة [2, 5] ، وهل يمكن لدالة الصحيح أن تكون مستمرة مطلقاً – ذ ت م على الفترة [0, 10] واحسب تغيرها الكلي على هذه الفترة؟

أجب عن الاسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في أجابتك : (تمنع الحاسبات)

السؤال الأول : (30°)

١. إذا كانت الدالة f مطردة على الفترة [a , b] فاثبت أنها ذ ت م مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، وهل يمكن للدالة $f(x)=e^{x}$ أن تكون ذ ت م على الفترة] 0 , +∞ [مع التعليل ؟

٢. ليكن $\mu^*(E)=0$, والمطلوب : إثبات أن المجموعة E تكون مقيسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* . ص١٢٩

٣. أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=[x]+9$ على الفترة [1 , 4] ، ثم بين أن $V_a^b\,(\,v_h(x)\,) = V_a^b\,(h)$

السؤال الثاني : (30°) :

١. لتكن لدينا التجزئة $T_\pi = \{0 , \frac{1}{2n} , \frac{1}{2n-1} , \ldots , \frac{1}{2} , 1\}$ للفترة المغلقة [0 , 1] ، والمطلوب :
بين بأستخدام هذه التجزئة والتعريف فيما إذا كانت الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} : 0 < x \le 1 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ذ ت م على [0 , 1] ، أم لا ؟ ولماذا ؟ وماهو تغيرها الكلي عندئذ ؟ .

٢- إذا كانت $\lambda\,(E) = 0$ ، فإن الدالة f المعرفة على E المقيسة تكون قيوسة عليها

٣- لتكن المجموعة $A \subset X$ (حيث $X \neq \emptyset$) فأكتب الجبر التام التي تولده هذه المجموعة ، وماذا نعني بقياس ليبيغ λ ثم أوجد : $\lambda(Q)$ ، $\lambda([-1,9[)$ ، $\lambda(\{0\})$.

السؤال الثالث : (24°)

١- أكتب الدالة $g(x)= \arctan x$ على الفترة [0 , 1] على شكل تكامل بحده الأعلى مع أثبات أن الدالة g ذ ت م على تلك الفترة ثم أحسب تغيرها الكلي عندئذ.

٢- خذ الدالة g السابقة وأحسب التكامل التالي : $J = (S)\int_0^1 \frac{x}{4}\,dg(x)$ بعد التأكد من وجوده .

السؤال الرابع (16°)

١- بين أن الدالة ψ المعرفة على الفترة [-1 , 1] بالشكل :

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} \;;\; x \neq 0 \\ 0 \;; \quad x = 0 \end{cases}$$

قيوسة على تلك الفترة

٢- أثبت أن كلا من مجموعة الأعداد العادية والغير عادية التي تنتمي إلى الفترة $[\sqrt{2} , 5]$ تكون مقيسة حسب مفهوم ليبيغ وأحسب قياس كل منها

جامعة البعث | امتحان الدورة الفصلية الصيفية للعام ٢٠١٠-٢٠١١ | الاسم:
كلية العلوم | لمقرر الدوال محدودة التغير | المدة : ٢ سا
قسم الرياضيات | لطلاب السنة الثالثة - رياضيات | الدرجة: ١٠٠

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة: (تمنع الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (٤٠ درجة):

أ- إذا كانت الدالة f ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$, فاثبت أنه يلزم ويكفي أن توجد دالة $G(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ وتحقق العلاقة :

$$|f(x'')-f(x')|\leq G(x'')-G(x') \; ; \; a\leq x'<x''\leq b$$

ب- احسب تكامل ستيلجس (علماً أنه موجود) : $J=(s)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx^2$ باستخدام طريقة تبديل المتغير .

ت- بين فيما إذا كانت الدالة: $h(x)=[x]$ مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[-1,5]$, وهل هي قيوسة أم لا على هذه الفترة , ولماذا ؟

ث- إذا كانت μ دالة مجموعات معرفة على $S=\mathcal{P}(X)$ حيث $X\neq\phi$ كما يلي : $\forall E\subseteq X\Rightarrow\mu(E)=0$, فاثبت أن μ قياس على S و أنه متزايد , وهل هو منته أم لا ؟ مع ذكر السبب .

السؤال الثاني(٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة g المعرفة على الفترة $E=[0,4]$ بالشكل :

$$g(x)=\begin{cases}x^2-3 & ; \; x\in[0,4]-\mathbb{Z}\\ 0 & ; \; x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

والمطلوب : ١- هل g دالة قيوسة على $E=[0,4]$ ؟ مع التعليل ؟

٢- بين أن الدالة $h(x)=x^2-3$ قيوسة على E , ثم احسب قيمة تكامل ليبيغ للدالة h على E بعد التأكد من وجوده .

ب- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة غير الخالية على X هي من جديد جبر تام على X,ثم اذكر صفين مولدين لجبر بوريل .

ت- أذكر مثالاً لدالة مستمرة على فترة محدودة $[a,b]$ وليست ذات تغيرات محدودة عليها , مع إثبات ذلك .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة : $B(x)=c+\int_a^x g(u)du$ حيث g دالة كموله ريمانياً على الفترة $[a,b]$ و c ثابت ما , فهل الدالة B مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف , وإذا كانت كذلك فهل هي كموله لوبيغياً على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

ب- أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\begin{cases}x & ; \; 0\leq x<1\\ x^2 & ; \; 1\leq x\leq 3\end{cases}$ على الفترة $[0,3]$, ثم بين فيما إذا كانت الدالة $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)-f$ ذات تغيرات محدودة على نفس الفترة , مع التعليل ؟

ت- أثبت أن متتالية الدوال التي حدها العام : $F_n(x)=x^n \; (n\geq 1)$ متقاربة تقريباً في كل مكان من دالة يطلب تعينها على الفترة $[0,1]$, وهل دالة النهاية قيوسة على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

حمص في ٢٠١١/٨/١٥ | انتهت الأسئلة | مدرس المقرر

مع تمنياتي لكم بالتوفيق | د. محمد عامر

